Л. А. ВЕНАТОВСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА • КРАСНОДАР
2018

ББК 22.213я73
В 29

Венатовская Л. А.

В 29 Исследование колебаний упругих тел методами компьютерной алгебры: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 32 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-3301-8

В учебном пособии кратко изложены основы колебаний упругих систем и представлены задания, которые студенты выполняют методами компьютерной алгебры. Особое внимание уделено задачам получения уравнений Эйлера — Лагранжа для механических систем с непрерывно распределенными параметрами, линеаризации уравнений Эйлера — Лагранжа в окрестности положений равновесия, численному интегрированию линейных и нелинейных уравнений движений при заданных граничных условиях, выполняемых в пакете Mathematica.

Материалы, представленные в пособии, используются в курсах «Компьютерное моделирование и пакеты прикладных программ» (Computer Modeling and Applied Software) и «Пакеты математических программ» (Mathematical Software Packages), читаемых для магистров, обучающихся в СПбГУ по направлению подготовки «Механика и математическое моделирование».

ББК 22.213я73

Рецензенты:

С. М. БАУЭР — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета;

Б. А. СМОЛЬНИКОВ — кандидат физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного технологического института (технический университет).

РЕКОМЕНДОВАНО
УМК математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
в качестве учебного пособия по направлению
«Механика и математическое моделирование»

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Принцип наименьшего действия Гамильтона (принцип стационарности действия) — способ получения уравнений движения физической системы при помощи поиска стационарного (экстремального) значения специального функционала — действия. Получаемые с его помощью уравнения движения называются *уравнениями Эйлера — Лагранжа.*

Напомним, что действие — это функционал, который имеет вид

$$I = \int L dt, \tag{1}$$

где L есть *лагранжиан* системы, зависящий в классической механике от обобщенных координат $q_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ и их первых производных по времени, а также от времени t. В механике сплошной среды лагранжиан зависит от параметров среды в каждой точке пространства и их производных по пространственным координатам и времени t и называется *плотностью лагранжиана.*

Действие является скалярным функционалом, зависящим от траектории тела. Таким образом, действие можно записать в любых обобщенных координатах, главное только, чтобы положение системы однозначно ими характеризовалось (например, вместо декартовых это могут быть полярные координаты, расстояния между точками системы, углы или их функции и т. д.).

Действие можно вычислить для совершенно произвольной траектории. Однако в классической механике среди всего набора возможных траекторий существует одна-единственная, по которой тело действительно пойдет. Принцип Гамильтона дает ответ на вопрос, как действительно будет двигаться тело: *между двумя заданными точками тело движется так, чтобы действие было стационарным.*

Это значит, что если задан лагранжиан системы, то мы с помощью вариационного исчисления можем установить, как именно будет двигаться тело, сначала получив уравнения движения — уравнения Эйлера — Лагранжа, а затем решив их.

1. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ УПРУГИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Под *упругими распределенными системами* понимают механические системы с непрерывно распределенными массой и жесткостью [3]. Они имеют бесконечное число степеней свободы. Поведение упругих систем описывают дифференциальными уравнениями в частных производных относительно некоторых функций координат и времени. Упругие системы называют линейными, если они описываются линейными уравнениями в частных производных. Для упругих систем, кроме начальных условий, требуется формулировка краевых условий.

Если внешние силы обладают потенциалом Π, то после введения интеграла действия

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U - \Pi)dt \tag{2}$$

вариационный принцип Гамильтона принимает вид

$$\delta I = 0. \tag{3}$$

Для упругого тела, занимающего объем V, ограниченный поверхностью S интеграл действия может быть представлен в следующем виде:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\iiint\limits_V L dV + \iint\limits_{S_\sigma} R dS \right) dt, \tag{4}$$

где L — объемная плотность лагранжиана; R — поверхностная плотность; S_σ — часть поверхности S, где заданы усилия. При этом L и R зависят от перемещений точек тела в направлении координатных осей и их первых производных по координатам и времени.

В общем случае поведение упругой системы при введении соответствующих гипотез описывает вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ с компонентами $u_j(t)$ (j может быть как меньше, так и больше 3). Объемная и поверхностная плотности лагранжиана зависят от u_j и их производных по координатам и времени t

(порядок производных может быть любым, но в большинстве практически используемых случаев порядок производных по координатам ≤ 2, а по времени ≤ 1).

Пусть состояние упругой системы характеризуется некоторой функцией $u = u(x, y, z, t)$ координат и времени. Если функция u имеет несколько компонент, то их обозначим $u_1, \ldots, u_m$.

Интеграл от лагранжиана по всем четырем переменным

$$I = \int L(t, x, y, z) dx dy dz dt \tag{5}$$

представляет собой действие [4]. Здесь интеграл берется по некоторой области четырехмерного пространства — времени.

Ниже будем вместо обозначений x, y, z и t пользоваться обозначениями x_1, x_2, x_3 и x_0, а интегрирование по этим переменным будем обозначать символом $\int \ldots dx$.

Обычно во всех физических теориях считают лагранжиан от функций $u_i(x_1, x_2, x_3, x_0)$ и их первых производных

$$L = L\left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right). \tag{6}$$

В этом случае принцип Гамильтона $\delta I = 0$ приводит к уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} = 0. \tag{7}$$

Если лагранжиан зависит от функций $u_i(x_1, \ldots, x_m)$ и от производных порядка выше, чем первый, то уравнения Эйлера имеют вид [10]

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_k} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_k}} \frac{\partial L}{\partial \left(\dfrac{\partial^k u_i}{\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_k}}\right)} = 0, \tag{8}$$

здесь $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — индексы, которые охватывают число переменных от 1 до m.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ И МЕМБРАНЫ

Уравнения движения для механической системы, состоящей из n материальных точек, могут быть получены из принципа Гамильтона, который состоит в следующем: если U — потенциальная энергия системы материальных точек, а T — ее кинетическая энергия, то траектория этой системы в фазовом пространстве доставляет минимум функционалу

$$\int_a^b (T - U)dt, \tag{9}$$

который называется *действием.*

Рассмотрим применение принципа Гамильтона к выводу уравнений колебаний (и соответствующих граничных условий) для простейших систем с бесконечным числом степеней свободы, а именно для струны и мембраны [4].

Струна

Рассмотрим движение струны, т.е. гибкой материальной нити с линейной плотностью ρ. Предположим, что концы струны $x = 0$ и $x = L$ закреплены упруго, т.е. что при их отклонении от положения равновесия возникает сила, пропорциональная этому отклонению. Обозначим через $u = u(x, t)$ отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t. Кинетическая энергия струны равна

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx. \tag{10}$$

Мы рассматриваем малые колебания струны, поэтому можно считать, что $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$. Потенциальную энергию запишем в виде суммы $V = V_1 + V_2$, где V_1 — работа, которую нужно затратить для того, чтобы перевести струну из положения равновесия, V_2 — работа силы натяжения, которая возникает на концах струны. Струна считается абсолютно гибкой, т.е. вся работа идет на ее растяжение (а не на изгиб). Пусть натяжение равно τ. Работа, которая при этом совершается, равна произведению силы τ на удлинение рассматриваемого элемента струны $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$, т.е.

$$dV_1 = \tau(ds - dx) = \tau \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) dx. \qquad (11)$$

Воспользуемся следующим разложением

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^6 - \ldots$$

и, так как $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$, отбросим члены более высокого порядка малости. Таким образом, уравнение (11) можно представить в следующем виде:

$$dV_1 = \frac{1}{2}\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (12)$$

Данное уравнение соответствует работе, отвечающей элементу струны. Для всей струны эта работа равна

$$V_1 = \int_0^L \frac{1}{2}\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (13)$$

При упругом закреплении одного из концов $x = 0$ ($x = L$) сила, действующая на него в момент t, пропорциональна его отклонению от положения равновесия. Обозначим через κ_1 и κ_2 упругие константы, через ξ — смещение конца струны, тогда работа, затрачиваемая на смещение упруго закрепленных концов струны, равна

$$\int_0^{u(0,t)} \kappa_1 \xi d\xi = \frac{1}{2}\kappa_1 u^2(0,t), \qquad (14)$$

$$\int_0^{u(L,t)} \kappa_2 \xi d\xi = \frac{1}{2}\kappa_2 u^2(L,t).$$

Отсюда получаем уравнения для потенциальной энергии V_2

$$V_2 = \frac{1}{2}\kappa_1 u^2(0,t) + \frac{1}{2}\kappa_2 u^2(L,t). \qquad (15)$$

Функция Лагранжа для всей системы имеет вид

$$L = T - V_1 - V_2 = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx - \\ -\frac{1}{2}\kappa_1 u^2(0,t) - \frac{1}{2}\kappa_2 u^2(L,t). \quad (16)$$

Действие за некоторый промежуток времени $[t_0, t_1]$ имеет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt - \quad (17) \\ -\frac{1}{2}\kappa_1\int_{t_1}^{t_2} u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\kappa_2\int_{t_1}^{t_2} u^2(L,t)dt.$$

Согласно принципу Гамильтона, функция $u(x,t)$, описывающая реальное движение струны, должна быть экстремалью функционала I.

Предположим, что $u(x,t)$ является функцией, на которой функционал (17) достигает минимума. Рассмотрим функцию $U = U(x,t) = u(x,t) + \epsilon\eta(x,t)$ и будем считать, что в начальный и конечный моменты функция $u(x,t)$ не варьируется, т.е. $\eta(x,t_1) = 0$ и $\eta(x,t_2) = 0$ для всех x таких, что $0 \le x \le L$. Таким образом, получаем функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]dxdt - \\ -\frac{1}{2}\kappa_1\int_{t_1}^{t_2}\left(u(0,t) + \epsilon\eta(0,t)\right)^2 dt - \quad (18) \\ -\frac{1}{2}\kappa_2\int_{t_1}^{t_2}\left(u(L,t) + \epsilon\eta(L,t)\right)^2 dt,$$

который достигает минимума в точке $\epsilon = 0$. Необходимое условие существования минимума $\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = 0$. Дифференцируем уравнение (18) по ϵ и полагаем результат равным нулю

$$\frac{dI}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L [\rho u_t\eta_t - \tau u_x\eta_x]dxdt - \\ -\kappa_1\int_{t_1}^{t_2} u(0,t)\eta(0,t)dt - \kappa_2\int_{t_1}^{t_2} u(L,t)\eta(L,t)dt = 0. \quad (19)$$

Если ρ и τ постоянные, то можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[-\tau u_x(x,t)\eta(x,t)] = -\tau u_x(x,t)\eta_x(x,t) - \tau u_{xx}(x,t)\eta(x,t),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho u_t(x,t)\eta(x,t)] = \rho u_t(x,t)\eta_t(x,t) + \rho u_{tt}(x,t)\eta(x,t).$$

Тогда уравнение (19) можно записать как

$$\begin{aligned}\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L [-\rho u_{tt} + \tau u_{xx}]\eta dxdt - \\ -\kappa_1\int_{t_1}^{t_2} u(0,t)\eta(0,t)dt &- \kappa_2\int_{t_1}^{t_2} u(L,t)\eta(L,t)dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}[-\tau u_x(x,t)\eta(x,t)]dxdt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}[\rho u_t(x,t)\eta(x,t)]dxdt = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Так как функция η обращается в ноль в точках t_1 и t_2, то последний интеграл в уравнении (20) равен нулю. Второй интеграл с конца перепишем как

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} [-\tau u_x(x,t)\eta(x,t)]\big|_0^L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \tau[u_x(0,t)\eta(0,t) - \\ -u_x(L,t)\eta(L,t)]dt.\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда уравнение (20) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L [-\rho u_{tt} + \tau u_{xx}]\eta dxdt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2}[\kappa_1 u(0,t) - \tau u_x(0,t)]\eta(0,t)dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2}[\kappa_2 u(L,t) + \tau u_x(L,t)]\eta(L,t)dt = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Согласно принципу Гамильтона, это выражение должно быть равно нулю для той функции $u(x,t)$, которая отвечает реальному движению струны.

Пусть η обращается в нуль на концах $\eta(0,t) = 0$ и $\eta(L,t) = 0$, тогда из (22) получаем уравнение Эйлера — Лагранжа, известное как *уравнение колебаний струны*

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0, \tag{23}$$

где $\alpha^2 = \tau/\rho$.

К уравнению (23) необходимо добавить дополнительные условия, например, задать начальное положение точек $u(x,0) = f(x)$ и начальную скорость $u_t(x,0) = \psi(x)$, а также задать условия на ее концах $u(0,t)$ и $u(L,t)$. В этом случае получим *краевую задачу Дирихле.*

Если $\eta(0,t)$ и $\eta(L,t)$ произвольные, то к уравнению колебаний струны (23) добавляются естественные граничные условия

$$\begin{aligned} \tau u_x(0,t) - \kappa_1 u(0,t) = 0, \\ \tau u_x(L,t) + \kappa_2 u(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Векторы нормали на концах струны $\vec{n} = -\vec{\mathbf{e_1}}$ для $x = 0$ и $\vec{n} = +\vec{\mathbf{e_1}}$ для $x = L$, тогда граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial n} + h_1 u(0,t) = 0, \qquad h_1 = \kappa_1/\tau, \\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial n} + h_2 u(L,t) = 0, \qquad h_2 = \kappa_2/\tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Граничные условия (25) связывают отклонения каждого из концов струны от положения равновесия с направлением касательной к струне на этом же конце. Полученная краевая задача известна как *краевая задача Робина.*

В частном случае, когда концы струны свободны $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = 0$, граничные условия (25) имеют вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \tag{26}$$

т.е. на свободном конце касательная к струне сохраняет все время то направление, которое она имеет в положении равновесия. Данная краевая задача известна как *краевая задача Неймана.*

Мембрана

Рассмотрим задачу о колебаниях мембраны. Под мембраной мы понимаем весьма тонкую пленку, которая, подобно струне, работает только на растяжение, но не на изгиб. Обозначим $u(x, y, t)$ отклонение точки (x, y) мембраны от равновесия в момент времени t. Кинетическая энергия мембраны в момент t

$$T = \frac{1}{2} \iint\limits_R \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdy, \tag{27}$$

где ρ — плотность мембраны, а интеграл берется по всей занимаемой мембраной области R.

Найдем потенциальную энергию мембраны в состоянии, описываемом функцией $u(x, y, t)$, где t фиксировано. Она равна работе, которую нужно затратить для того, чтобы перевести мембрану из положения равновесия $u = 0$ в рассматриваемое положение. Эта работа слагается из работы смещения края мембраны (который мы будем считать закрепленным упруго) и работы, затрачиваемой на деформацию мембраны. Первое слагаемое равно

$$V_1 = \frac{1}{2} \int\limits_C \kappa(s) u^2(s, t) ds, \tag{28}$$

здесь C — граница мембраны, $u(s, t)$ — ее отклонение от положения равновесия, а $\kappa(s)$ — коэффициент упругости в точке s.

Работа, затрачиваемая на деформацию элемента мембраны, равна натяжению мембраны на изменение площади этого элемента. При деформации мембраны элемент площади $dxdy$ переходит в $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dxdy$. Таким образом,

$$dV_2 = \tau \left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \right) dxdy. \tag{29}$$

Мы считаем, что $|\frac{\partial u}{\partial x}| \leq 1$ и $|\frac{\partial u}{\partial y}| \leq 1$, тогда, ограничиваясь в выражении

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} = 1 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{4}(u_x^2 + u_y^2)^2 + \ldots$$

главными членами, получим выражение для потенциальной энергии для элемента мембраны

$$dV_2 = \frac{\tau}{2}(u_x^2 + u_y^2)dxdy. \tag{30}$$

Работа, затрачиваемая на деформацию всей мембраны, есть

$$V_2 = \frac{1}{2}\iint\limits_R \tau(u_x^2 + u_y^2)dxdy. \tag{31}$$

Таким образом, для мембраны действие имеет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \iint\limits_R \left(\frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}\tau(u_x^2 + u_y^2)\right) dxdydt - \tag{32}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int\limits_C \kappa(s)u^2(s,t)dsdt.$$

Предположим, что $u(x,y,t)$ доставляет минимум функционалу I, и рассмотрим функцию $U = U(x,y,t) = u(x,y,t)+$ $+\epsilon\eta(x,y,t)$. Как и в случае струны, будем считать, что функция η, определяющая вариацию, равна нулю в начальный и конечный моменты $\eta(x,y,t_0) = \eta(x,y,t_1) = 0$.

Согласно принципу Гамильтона функционал

$$I = I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \iint\limits_R \left(\frac{1}{2}\rho U_t^2 - \frac{1}{2}\tau(U_x^2 + U_y^2)\right) dxdydt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int\limits_C \kappa(s)U^2(s,t)dsdt \tag{33}$$

должен иметь минимум при $\epsilon = 0$. Из необходимого условия минимума $\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$ получим

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \iint\limits_R \left(\rho u_t\eta_t - \tau(u_x\eta_x + u_y\eta_y)\right) dxdydt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \kappa(s)u(s,t)\eta dt = 0. \tag{34}$$

Воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_t\eta) = u_t\eta_t + u_{tt}\eta, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_x\eta) = u_x\eta_x + u_{xx}\eta,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(u_y\eta) = u_y\eta_y + u_{yy}\eta \tag{35}$$

и запишем уравнение (34) в виде

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_R \left(-\rho u_{tt} + \tau(u_{xx}+u_{yy})\right)\eta dxdydt -$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_R \tau\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_x\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y\eta)\right]dxdydt +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t\eta)dxdydt - \int_{t_1}^{t_2}\kappa(s)u(s,t)\eta dt = 0. \tag{36}$$

Так как интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t\eta)dxdydt$$

равен нулю (как интеграл по цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси t), а

$$\iint\limits_R \tau\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_x\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y\eta)\right]dxdy =$$
$$= \int\limits_C (u_x\eta dy - u_y\eta dx) = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\eta ds,$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{grad} u\cdot\hat{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{e}_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{e}_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial s}\hat{\mathbf{e}_1} - \frac{\partial x}{\partial s}\hat{\mathbf{e}_2}\right),$$

то окончательное выражение для вариации (36) можно записать в следующем виде:

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_R \left(-\rho u_{tt} + \tau(u_{xx}+u_{yy})\right)\eta dxdydt -$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int\limits_C \left(\kappa u + \tau\frac{\partial u}{\partial n}\right)\eta dsdt = 0. \tag{37}$$

Предположим, что в граничных точках функция u не варьируется, т.е. $\eta(x, y, t) = 0$. Тогда получим уравнение Эйлера — Лагранжа, известное как *уравнение колебаний мембраны*

$$\rho u_{tt} = \tau(u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{или} \quad u_{tt} = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}), \tag{38}$$

где $\alpha^2 = \tau/\rho$.

Для решения уравнения (38) необходимо задать начальную форму мембраны $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Так как $\eta = 0$ вдоль границы, поэтому граничные условия можно задать как $u(x, u, t) = G(x, y, t)$, для $x, y \in C$.

Если η произвольная функция, то из естественных граничных условий получаем граничные условия, отвечающие упругому закреплению границы

$$k(s)u(s, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{для} \quad s \in C = \partial R. \tag{39}$$

Если $\kappa(s) = 0$, то условие для свободной мембраны имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{для} \quad x, y \in C = \partial R. \tag{40}$$

Жесткому закреплению границы отвечает случай, когда $\kappa(s) = \infty$, т.е.

$$u(x, y, t) = 0, \quad \text{для} \quad x, y \in C = \partial R. \tag{41}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHEMATICA

Исследование уравнений Эйлера — Лагранжа для механических систем с непрерывно распределенными параметрами проводится на примере струны и круглой мембраны в системе компьютерной алгебры Mathematica 11. Основы работы в пакете Mathematica изложены в документации системы Wolfram Mathematica [8].

Задание 1

Получить уравнения Эйлера — Лагранжа для механической системы с непрерывно распределенными параметрами по заданным кинетической и потенциальной энергии.

Провести линеаризацию уравнений Эйлера — Лагранжа в окрестности положения равновесия, используя формулу разложения в ряд Тейлора функции нескольких переменных

$$\begin{aligned} T(x_1,\dots,x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{(x_1-a_1)^{n_1}\cdots(x_d-a_d)^{n_d}}{n_1!\cdots n_d!}\times \\ \times\left(\frac{\partial^{n_1+\dots+n_d}f}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_d^{n_d}}\right)(a_1,\dots,a_d) = f(a_1,\dots,a_d)+ \\ +\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial f(a_1,\dots,a_d)}{\partial x_j}(x_j-a_j)+ \\ +\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 f(a_1,\dots,a_d)}{\partial x_j\partial x_k}(x_j-a_j)(x_k-a_k)+ \\ +\frac{1}{3!}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\frac{\partial^3 f(a_1,\dots,a_d)}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}\times \\ \times(x_j-a_j)(x_k-a_k)(x_l-a_l)+\cdots \end{aligned} \tag{42}$$

Поперечные колебания струны

Получим уравнения Эйлера — Лагранжа для струны со свободными концами. Введем функцию $\mathtt{U}=\mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}]$ и запишем выражения для кинетической $\mathtt{T}$ и потенциальной $\mathtt{P}$ энергий

$$\mathtt{T}=\frac{1}{2}\rho[\mathtt{x}]\left(\partial_{\mathtt{t}}\mathtt{U}\right)^2, \qquad \mathtt{P}=\tau\left(\sqrt{1+\left(\partial_{\mathtt{x}}\mathtt{U}\right)^2}-1\right).$$

Тогда лагранжиан системы определим как разность $\mathtt{L}=\mathtt{T}-\mathtt{P}$.

Далее, для работы с вариационным исчислением необходимо подключить пакет `VariationaLMethods`.

Функция $\mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}]$, описывающая движение струны, должна быть экстремалью функционала $S=\int_{t_1}^{t_2} L dt$. Из необходимого условия экстремума — равенства нулю вариации функционала $\mathtt{L}$

$$\mathtt{VariationalD}[\mathtt{L}, \mathtt{U}, \{\mathtt{x}, \mathtt{t}\}] = 0$$

приходим к уравнению Эйлера — Лагранжа для струны

$$\frac{\tau \mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}]}{\left(1 + \mathtt{u}^{(1,0)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}]^2\right)^{3/2}} == \rho[\mathtt{x}]\mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}]. \tag{43}$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа можно получить напрямую, используя функцию $\mathtt{EulerEquations}[\mathtt{L}, \mathtt{U}, \{\mathtt{x}, \mathtt{t}\}]$. Отметим, что уравнение (43) является нелинейным.

В случае малых колебаний для их описания можно использовать линеаризованные уравнения. Обозначим $\mathtt{X}_1 = \mathtt{u}_\mathtt{x}$ и $\mathtt{X}_2 = \mathtt{u}_\mathtt{t}$ и разложим в ряд Тейлора в окрестности нуля функцию $\mathtt{L}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2)$. Так как нас интересуют только квадратичные члены, воспользуемся первыми двумя членами разложения (42)

$$\begin{aligned}
&\mathtt{X} = \{\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{x}, \mathtt{t}], \mathtt{x}], \mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{x}, \mathtt{t}], \mathtt{t}]\}\\
&\mathtt{n} = \mathtt{Length}[\mathtt{X}]\\
&\mathtt{S} = \mathtt{Table}[\mathtt{X}[[\mathtt{i}]] \to 0, \{\mathtt{i}, 1, \mathtt{n}\}]\\
&\mathtt{LL} = \mathtt{Sum}[(\mathtt{D}[\mathtt{L}, \mathtt{X}[[\mathtt{i}]]]/.\mathtt{S})\mathtt{X}[[\mathtt{i}]], \{\mathtt{i}, 1, \mathtt{n}\}]+ \qquad (44)\\
&+1/2\mathtt{Sum}[(\mathtt{D}[\mathtt{L}, \mathtt{X}[[\mathtt{i}]], \mathtt{X}[[\mathtt{j}]]]/.\mathtt{S})\mathtt{X}[[\mathtt{i}]]\mathtt{X}[[\mathtt{j}]], \{\mathtt{i}, 1, \mathtt{n}\}, \{\mathtt{j}, 1, \mathtt{n}\}]\\
&\{\mathtt{i}, 1, \mathtt{n}\}, \{\mathtt{j}, 1, \mathtt{n}\}, \{\mathtt{k}, 1, \mathtt{n}\}].
\end{aligned}$$

Лагранжиан в результате квадратизации

$$\mathtt{LL} = \frac{1}{2}\left(\rho[\mathtt{x}]\mathtt{u}^{(0,1)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}]^2 - \tau \mathtt{u}^{(1,0)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}]^2\right). \tag{45}$$

Таким образом, получаем линеаризованное уравнение Эйлера — Лагранжа $\mathtt{EulerEquations}[\mathtt{LL}, \mathtt{U}, \{\mathtt{x}, \mathtt{t}\}]$

$$\tau \mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}] = \rho[\mathtt{x}]\mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}]. \tag{46}$$

Колебания круглой мембраны

Получим уравнения Эйлера — Лагранжа для круглой мембраны. Введем полярные координаты $\mathtt{r}$ и φ и зададим отклонение точек мембраны $\mathtt{U} = \mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}]$.

Кинетическая энергия системы в полярных координатах

$$\mathtt{T} = \frac{\mathtt{r}}{2}\rho[\mathtt{r},\varphi](\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],\mathtt{t}])^2. \tag{47}$$

Деформацию мембраны $\sqrt{1+(u'x)^2+(u'y)^2}-1$ также запишем в полярных координатах, используя следующие формулы перехода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Тогда для потенциальной энергии $\mathtt{P}$ имеем

$$\begin{gathered}\mathtt{P} = \tau\mathtt{r}(\mathtt{Sqrt}[1+(\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],\mathtt{r}]\mathtt{Cos}[\varphi]- \\ -\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],\varphi]\mathtt{Sin}[\varphi]/\mathtt{r})^2+ \\ +(\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],\mathtt{r}]\mathtt{Sin}[\varphi]+\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],\varphi]\mathtt{Cos}[\varphi]/\mathtt{r})^2]-1).\end{gathered} \tag{48}$$

Лагранжиан системы есть разность $\mathtt{L} = \mathtt{T} - \mathtt{P}$.

Получаем уравнение Эйлера — Лагранжа для мембраны

$$\mathtt{EulerEquations}[\mathtt{L},\mathtt{u}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}],$$

которое имеет очень громоздкий вид

$$\begin{gathered}\Big(\tau\mathtt{r}^2\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^3+\tau\mathtt{r}\mathtt{u}^{(0,2,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\left(1+\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2\right)- \\ -\mathtt{r}^3\rho[\mathtt{r},\varphi]\mathtt{u}^{(0,0,2)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2\cdot \\ \cdot\sqrt{1+\frac{\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2}{\mathtt{r}^2}+\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2}+ \\ +\tau\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\left(\mathtt{r}^2+2\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\left(\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]-\right.\right. \\ \left.\left.-\mathtt{r}\mathtt{u}^{(1,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\right)\right)-\mathtt{r}\left(\mathtt{r}^2+\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2\right)\cdot \\ \Big(\rho[\mathtt{r},\varphi]\mathtt{u}^{(0,0,2)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\cdot \\ \cdot\sqrt{1+\frac{\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2}{\mathtt{r}^2}+\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2}-\tau\mathtt{u}^{(2,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]\Big)\Big)\Big/ \\ \left(\sqrt{1+\frac{\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2}{\mathtt{r}^2}+\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2}\left(\mathtt{u}^{(0,1,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2+\right.\right. \\ \left.\left.\mathtt{r}^2\left(1+\mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r},\varphi,\mathtt{t}]^2\right)\right)\right) == 0.\end{gathered} \tag{49}$$

Проведем линеаризацию уравнения (49) в окрестности положения равновесия. Обозначим $\mathtt{X}_1 = \mathtt{u}_\mathtt{r}, \mathtt{X}_2 = \mathtt{u}_\varphi, \mathtt{X}_3 = \mathtt{u}_\mathtt{t}$ и разложим в ряд Тейлора в окрестности нуля функцию $\mathtt{L}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2, \mathtt{X}_3)$, используя формулу (42)

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{X} = \{\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \mathtt{r}], \mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \varphi], \mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \mathtt{t}]\}\\
&\mathtt{n} = \mathtt{Length}[\mathtt{X}]\\
&\mathtt{S} = \mathtt{Table}[\mathtt{X}[[\mathtt{i}]] \to \mathtt{0}, \{\mathtt{i}, \mathtt{1}, \mathtt{n}\}]\\
&\mathtt{LL} = \mathtt{Sum}[(\mathtt{D}[\mathtt{L}, \mathtt{X}[[\mathtt{i}]]]/.\mathtt{S})\mathtt{X}[[\mathtt{i}]], \{\mathtt{i}, \mathtt{1}, \mathtt{n}\}]+ \qquad (50)\\
&+\mathtt{1/2Sum}[(\mathtt{D}[\mathtt{L}, \mathtt{X}[[\mathtt{i}]], \mathtt{X}[[\mathtt{j}]]]/.\mathtt{S})\mathtt{X}[[\mathtt{i}]]\mathtt{X}[[\mathtt{j}]], \{\mathtt{i}, \mathtt{1}, \mathtt{n}\}, \{\mathtt{j}, \mathtt{1}, \mathtt{n}\}].
\end{aligned}
$$

Лагранжиан после линеаризации

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{LL} = \frac{\mathtt{1}}{\mathtt{2}}\rho[\mathtt{r}, \varphi](\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \mathtt{t}])^2\mathtt{r}-\\
&-\tau\mathtt{r}((\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \mathtt{r}]\mathtt{Cos}[\varphi] - \mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \varphi]\mathtt{Sin}[\varphi]/\mathtt{r})^2+ \qquad (51)\\
&+(\mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \mathtt{r}]\mathtt{Sin}[\varphi] + \mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \varphi]\mathtt{Cos}[\varphi]/\mathtt{r})^2).
\end{aligned}
$$

Воспользуемся функцией

$$\mathtt{EulerEquations}[\mathtt{L}, \mathtt{u}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}], \{\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}\}]$$

и получим линейное уравнение колебаний мембраны

$$
\begin{aligned}
&\tau\left(\frac{\mathtt{u}^{(0,2,0)}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}]}{\mathtt{r}} + \mathtt{u}^{(1,0,0)}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}] + \mathtt{r}\mathtt{u}^{(2,0,0)}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}]\right) == \\
&\qquad \mathtt{r}\rho[\mathtt{r}, \varphi]\mathtt{u}^{(0,0,2)}[\mathtt{r}, \varphi, \mathtt{t}]. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Задание 2

Построить аналитическое решение для механической системы, используя разделение переменных.

Поперечные колебания струны

Построим аналитическое решение линейной задачи (46)

$$\tau\mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}] = \rho[\mathtt{x}]\mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{x}, \mathtt{t}],$$

удовлетворяющее следующим краевым

$$\mathtt{u}[0,\mathtt{t}] == 0, \mathtt{u}[\mathtt{l},\mathtt{t}] == 0$$

и начальным условиям

$$\mathtt{u}[\mathtt{x},0] == \varphi[\mathtt{x}], \mathtt{u}^{(0,1)}[\mathtt{x},0] == \psi[\mathtt{x}].$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение *методом Фурье* (*методом разделения переменных*)

$$\mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}] = \mathtt{w}[\mathtt{x}]\mathtt{Sin}[\omega \mathtt{t}], \tag{53}$$

здесь ω — круговая частота колебаний.

В результате разделения переменных

$$\begin{aligned}
&\mathtt{Lin} = -\rho \mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{x},\mathtt{t}] + \tau \mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{x},\mathtt{t}];\\
&\mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}] = \mathtt{w}[\mathtt{x}]\mathtt{Sin}[\omega \mathtt{t}];\\
&\mathtt{Eq} = \mathtt{Lin.u}^{(\mathtt{n1_},\mathtt{n2_})}[\mathtt{x},\mathtt{t}] \to \mathtt{D}[\mathtt{w}[\mathtt{x}]\mathtt{Sin}[\omega \mathtt{t}], \{\mathtt{x},\mathtt{n1}\}, \{\mathtt{t},\mathtt{n2}\}];\\
&\mathtt{Lin1} = \mathtt{Simplify}[\mathtt{ComplexExpand}[\mathtt{Eq} == 0]]
\end{aligned} \tag{54}$$

имеем

$$\mathtt{Sin}[\omega \mathtt{t}] \left(\rho \omega^2 \mathtt{w}[\mathtt{x}] + \tau \mathtt{w}''[\mathtt{x}]\right) == 0. \tag{55}$$

Решением уравнения (55)

$$\begin{aligned}
\mathtt{DSolveValue}[\{\mathtt{Sin}[\mathtt{t}\omega](\rho\omega^2\mathtt{w}[\mathtt{x}] + \mathtt{F}(\mathtt{w}''[\mathtt{x}]) == 0,\\
\mathtt{w}[0] == 0, \mathtt{w}[\mathtt{l}] == 0\}, \mathtt{w}[\mathtt{x}], \mathtt{x}]
\end{aligned} \tag{56}$$

является функция $\mathtt{w}[\mathtt{x}]$

$$\mathtt{C}[1]\mathtt{Sin}\left[\frac{\mathtt{x}\sqrt{\rho}\omega}{\sqrt{\tau}}\right], \text{ где } \mathtt{Sin}\left[\frac{\mathtt{l}\sqrt{\rho}\omega}{\sqrt{\tau}}\right] == 0. \tag{57}$$

Определим круговую частоту колебаний

$$\begin{gathered}
\mathtt{w}[\mathtt{x_}] := \mathtt{Sin}[(\pi \mathtt{n})/\mathtt{lx}];\\
\mathtt{chast} = \mathtt{Solve}[\mathtt{Lin1},\omega][[3]]\\
\left\{\omega \to \frac{\sqrt{\tau}\mathtt{n}\pi}{\mathtt{l}\sqrt{\rho}}\right\}.
\end{gathered} \tag{58}$$

Тогда аналитическим решением уравнения (46)

$$\texttt{Evaluate}[\texttt{Simplify}[\texttt{u}[\texttt{x},\texttt{t}]/.\texttt{chast}]]$$

будет функция $\texttt{u}[\texttt{x},\texttt{t}]$, равная

$$\texttt{Sin}\left[\frac{\texttt{n}\pi\texttt{x}}{\texttt{l}}\right]\texttt{Sin}\left[\frac{\sqrt{\tau}\texttt{n}\pi\texttt{t}}{\texttt{l}\sqrt{\rho}}\right]. \tag{59}$$

Колебания круглой мембраны

Построим аналитическое решение линейной задачи (52)

$$\tau\left(\frac{\texttt{u}^{(0,2,0)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]}{\texttt{r}}+\texttt{u}^{(1,0,0)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]+\texttt{r}\texttt{u}^{(2,0,0)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]\right)== \\ \texttt{r}\rho[\texttt{r},\varphi]\texttt{u}^{(0,0,2)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}].$$

Запишем в полярных координатах краевое

$$\texttt{u}[\texttt{l},\varphi,\texttt{t}]==0 \tag{60}$$

и начальные условия

$$\texttt{u}[\texttt{r},\varphi,0]==\texttt{f}[\texttt{r},\varphi],\qquad \texttt{u}^{(0,0,1)}[\texttt{r},\varphi,0]==\texttt{F}[\texttt{r},\varphi]. \tag{61}$$

Будем искать отличные от тождественного нуля решения уравнения (52), удовлетворяющие краевому условию (60) методом Фурье

$$\texttt{u}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]=\texttt{R}[\texttt{r}]\Phi[\varphi]\texttt{T}[\texttt{t}]. \tag{62}$$

В результате разделения переменных

$$\begin{aligned}
&\texttt{Lin}=\tau\left(\frac{\texttt{u}^{(0,2,0)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]}{\texttt{r}}+\texttt{u}^{(1,0,0)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]+\texttt{r}\texttt{u}^{(2,0,0)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]\right)-\\
&-\texttt{r}\rho[\texttt{r},\varphi]\texttt{u}^{(0,0,2)}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}];\\
&\texttt{u}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]=\texttt{R}[\texttt{r}]\Phi[\varphi]\texttt{T}[\texttt{t}];\\
&\texttt{Eq}=\texttt{Lin}/.\texttt{u}^{(\texttt{n1_},\texttt{n2_},\texttt{n3_})}[\texttt{r},\varphi,\texttt{t}]\to\texttt{D}[\texttt{R}[\texttt{r}]\Phi[\varphi]\texttt{T}[\texttt{t}],\{\texttt{r},\texttt{n1}\},\\
&\{\varphi,\texttt{n2}\},\{\texttt{t},\texttt{n3}\}];\\
&\texttt{Lin1}=\texttt{Simplify}[\texttt{ComplexExpand}[\texttt{Eq}==0]]
\end{aligned} \tag{63}$$

имеем

$$\frac{1}{\mathtt{r}}\left[\mathtt{r}^2\mathtt{R}[\mathtt{r}]\rho[\mathtt{r},\varphi]\Phi[\varphi]\mathtt{T}''[\mathtt{t}]-\tau\mathtt{T}[\mathtt{t}]\left(\mathtt{r}\Phi[\varphi](\mathtt{R}'[\mathtt{r}]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mathtt{r}\mathtt{R}''[\mathtt{r}])+\mathtt{R}[\mathtt{r}]\Phi''[\varphi]\right)\right]==0.$$

Последнее выражение можно переписать в более удобной форме

$$\frac{\mathtt{T}''[\mathtt{t}]}{\mathtt{T}[\mathtt{t}]}-\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{\mathtt{R}'[\mathtt{r}]+\mathtt{r}\mathtt{R}''[\mathtt{r}]}{\mathtt{r}\mathtt{R}[\mathtt{r}]}+\frac{\Phi''[\varphi]}{\mathtt{r}^2\Phi[\varphi]}\right)==0.$$

Положим

$$\begin{aligned}\mathtt{Eq1}&=\frac{\mathtt{T}''[\mathtt{t}]}{\mathtt{T}[\mathtt{t}]}=-\nu^2\mathtt{a}^2;\\ \mathtt{Eq2}&=\frac{\mathtt{R}'[\mathtt{r}]+\mathtt{r}\mathtt{R}''[\mathtt{r}]}{\mathtt{r}\mathtt{R}[\mathtt{r}]}+\frac{\Phi''[\varphi]}{\mathtt{r}^2\Phi[\varphi]}=-\nu^2,\end{aligned}\tag{64}$$

где ν^2 — положительная постоянная, а $\mathtt{a}^2=\tau/\rho$.

Из первого уравнения (64) получаем периодическую зависимость от времени, характерную для колебательных процессов

$$\begin{gathered}\mathtt{DSolve}[\mathtt{Eq1},\mathtt{T}[\mathtt{t}],\mathtt{t}]/.\mathtt{C}[1]\to\mathtt{A}[1]/.\mathtt{C}[2]\to\mathtt{A}[2]\\ \{\{\mathtt{T}[\mathtt{t}]\to\mathtt{A}[2]\mathtt{Cos}[\mathtt{at}\nu]+\mathtt{A}[1]\mathtt{Sin}[\mathtt{at}\nu]\}\}.\end{gathered}\tag{65}$$

Второе уравнение (64) запишем в виде

$$\frac{\Phi''[\varphi]}{\Phi[\varphi]}=-\mathtt{r}^2\left(\frac{\mathtt{R}'[\mathtt{r}]+\mathtt{r}\mathtt{R}''[\mathtt{r}]}{\mathtt{r}\mathtt{R}[\mathtt{r}]}+\nu^2\right)\tag{66}$$

и положим

$$\begin{aligned}\mathtt{Eq3}&=\frac{\Phi''[\varphi]}{\Phi[\varphi]}=-\mathtt{k}^2;\\ \mathtt{Eq4}&=-\mathtt{r}^2\left(\frac{\mathtt{R}'[\mathtt{r}]+\mathtt{r}\mathtt{R}''[\mathtt{r}]}{\mathtt{r}\mathtt{R}[\mathtt{r}]}+\nu^2\right)=-\mathtt{k}^2,\end{aligned}\tag{67}$$

где $\mathtt{k}$ — целое положительное число.

Разрешим уравнения относительно $\mathtt{\Phi}(\varphi)$ и $\mathtt{R}(\mathtt{r})$

$$\mathtt{DSolve}[\mathtt{Eq3}, \mathtt{\Phi}[\varphi], \varphi].\mathtt{C}[1] \to \mathtt{B}[1]/.\mathtt{C}[2] \to \mathtt{B}[2]$$
$$\{\{\mathtt{\Phi}[\varphi] \to \mathtt{B}[1]\mathtt{Cos}[\mathtt{k}\varphi] + \mathtt{B}[2]\mathtt{Sin}[\mathtt{k}\varphi]\}\}; \tag{68}$$
$$\mathtt{DSolve}[\mathtt{Eq4}, \mathtt{R}[\mathtt{r}], \mathtt{r}]$$
$$\{\{\mathtt{R}[\mathtt{r}] \to \mathtt{BesselJ}[\mathtt{k}, \mathtt{r}\nu]]\mathtt{C}[1] + \mathtt{BesselY}[\mathtt{k}, \mathtt{r}\nu]\mathtt{C}[2]\}\}, \tag{69}$$

здесь BesselJ и BesselY функции Бесселя первого и второго рода. В силу того, что BesselY сингулярна в нуле, а в центре мембраны $\mathtt{R}(\mathtt{r})$ должно оставаться конечным, положим $\mathtt{C}[2] = 0$

$$\mathtt{DSolve}[\mathtt{Eq4}, \mathtt{R}[\mathtt{r}], \mathtt{r}]/.\mathtt{C}[2] \to 0$$
$$\{\{\mathtt{R}[\mathtt{r}] \to \mathtt{BesselJ}[\mathtt{k}, \mathtt{r}\nu]\mathtt{C}[1]\}\}. \tag{70}$$

В силу краевого условия $\mathtt{R}(0) = \mathtt{l}$ нужно потребовать, чтобы $\mathtt{BesselJ}[\mathtt{k}, \mathtt{l}\nu] = 0$. Таким образом, $\mathtt{l}\nu$ должно быть одним из корней функции $\mathtt{BesselJ}[\mathtt{k}, \mathtt{x}]$, т.е. $\mathtt{l}\nu = \mu_{\mathtt{n}}^{(\mathtt{k})}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Постоянная ν не может быть произвольной, а должна иметь одно из значений $\nu = \mu_{\mathtt{n}}^{(\mathtt{k})}/\mathtt{l}$

$$\mu[\mathtt{n\_}] := \mathtt{BesselJZero}[0, \mathtt{n}];$$
$$\nu[\mathtt{n\_}] := \mu[\mathtt{n}]/\mathtt{l};$$
$$\mathtt{R}[\mathtt{r}] := \mathtt{BesselJ}[\mathtt{k}, \mathtt{r}\nu[\mathtt{n}]]; \mathtt{R}[\mathtt{r}].$$

Следовательно, $\mathtt{R}(\mathtt{r})$ есть

$$\mathtt{C}[1]\mathtt{BesselJ}[\mathtt{k}, (\mathtt{rBesselJZero}[0, \mathtt{n}])/\mathtt{l}]. \tag{71}$$

Учитывая соотношения (65), (68) и (71)

$$\mathtt{u} = \mathtt{R}[\mathtt{r}] * \mathtt{T}[\mathtt{t}] * \mathtt{\Phi}[\varphi]/.\nu \to \nu[\mathtt{n}],$$

получаем решение для круглой мембраны

$$\mathtt{BesselJ}\left[\mathtt{k}, \frac{\mathtt{rBesselJZero}[0, \mathtt{n}]}{\mathtt{l}}\right] \mathtt{C}[1]\Big(\mathtt{B}[1]\mathtt{Cos}[\mathtt{k}\varphi] +$$
$$+\mathtt{B}[2]\mathtt{Sin}[\mathtt{k}\varphi]\Big)\Big(\mathtt{A}[1]\mathtt{Cos}\Big[(\mathtt{atBesselJZero}[0, \mathtt{n}])/\mathtt{l}\Big] + \tag{72}$$
$$+\mathtt{A}[2]\mathtt{Sin}\Big[(\mathtt{atBesselJZero}[0, \mathtt{n}])/\mathtt{l}\Big]\Big).$$

Используя функцию TraditionalForm, представим решение в традиционной форме

$$\mathtt{u} = \mathtt{C}(1)\Big(\mathtt{B}(1)\cos(\mathtt{k}\varphi) + \mathtt{B}(2)\sin(\mathtt{k}\varphi)\Big)\cdot$$
$$\cdot\left(\mathtt{A}(2)\cos\frac{\mathtt{atj}_{0,\mathtt{n}}}{\mathtt{l}} + \mathtt{A}(1)\sin\frac{\mathtt{atj}_{0,\mathtt{n}}}{\mathtt{l}}\right)\mathtt{J}_{\mathtt{k}}\left(\frac{\mathtt{rj}_{0,\mathtt{n}}}{\mathtt{l}}\right),$$

здесь $\mathtt{j}_{0,\mathtt{n}}$ есть $\mathtt{BesselJZero}[0,\mathtt{n}]$, а $\mathtt{J}_{\mathtt{k}}(\mathtt{x})$ — $\mathtt{BesselJ}[\mathtt{k},\mathtt{x}]$.

Узловыми линиями для такой волны являются k диаметров, делящих мембрану на $2k$ секторов (вдоль этих диаметров $B_1\cos(k\varphi) + B_2\sin(k\varphi) = 0$) и $n-1$ концентрических окружностей, вдоль которых $J_k\left(\dfrac{\mu_n^{(k)}}{l}r\right) = 0$.

Задание 3

Решение линейной и нелинейной краевых задач для уравнения в частных производных.

Поперечные колебания струны

Обозначим через LinEq линейные уравнения (43)

$$\mathtt{LinEq} = -\rho\mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{x},\mathtt{t}] + \tau\mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{x},\mathtt{t}],$$

через NonLinEq — нелинейные уравнения (46)

$$\mathtt{NonLinEq} = \frac{\tau\mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{x},\mathtt{t}]}{\left(1+\mathtt{u}^{(1,0)[\mathtt{x},\mathtt{t}]^2}\right)^{3/2}} - \rho\mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{x},\mathtt{t}]$$

и рассмотрим следующие начальные и краевые условия

$\mathtt{Cond} = \{\mathtt{u}[0,\mathtt{t}] == 0, \mathtt{u}[\mathtt{l},\mathtt{t}] == 0, \mathtt{u}^{(0,0)}[\mathtt{x},0] == \mathtt{aSin}[\mathtt{xn}\omega 2/\mathtt{l}],$
$\mathtt{u}^{(0,1)}[\mathtt{x},0] == 0\}.$

Найдем численное решение краевых задач

$\mathtt{A} = \mathtt{NDSolve}[\{\mathtt{LinEq} == 0, \mathtt{Cond}\}, \mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}], \{\mathtt{x},0,\mathtt{l}\}, \{\mathtt{t},0,\mathtt{T}\},$
$\mathtt{MaxStepSize} \to 0.005][[1]],$
$\mathtt{B} = \mathtt{NDSolve}[\{\mathtt{NonLinEq} == 0, \mathtt{Cond}\}, \mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}], \{\mathtt{x},0,\mathtt{l}\}, \{\mathtt{t},0,\mathtt{T}\},$
$\mathtt{MaxStepSize} \to 0.005][[1]].$

Аналитическое решение имеет вид

$$\mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}] = \tag{73}$$
$$= \sum_{\mathtt{k}=1}^{\infty}\left(\mathtt{A_k Cos}[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\rho}}\frac{\pi\mathtt{kt}}{\mathtt{l}}] + \mathtt{B_k Sin}[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\rho}}\frac{\pi\mathtt{kt}}{\mathtt{l}}]\right)\mathtt{Sin}[\frac{\pi\mathtt{kx}}{\mathtt{l}}].$$

Положим $\omega_2 = \pi$, $\mathtt{n} = 2$. Из условия $\mathtt{u}^{(0,1)}[\mathtt{x}, 0] == 0$ следует, что все $\mathtt{B_n} = 0$. Из условия $\mathtt{u}^{(0,0)} == \mathtt{aSin}[\mathtt{xn}\omega 2/\mathtt{l}]$ имеем, что только $\mathtt{A_2} = \mathtt{a}$, а остальные $\mathtt{A_n} = 0$.

Таким образом, получаем

$$\mathtt{u}[\mathtt{x},\mathtt{t}] = \mathtt{aCos}[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\rho}}\frac{\mathtt{n}\pi\mathtt{t}}{\mathtt{l}}]\mathtt{Sin}[\frac{\mathtt{n}\pi\mathtt{x}}{\mathtt{l}}]. \tag{74}$$

Сравним полученные решения для линейной и нелинейной задач с аналитическим решением (74). Анимацию можно выполнить следующим образом:

```
TTT = Table[Plot[{Evaluate[u[x, t]/.A], Evaluate[u[x, t]/.B],
aCos[n π t/l]Sin[n π, x/l]}, {x, 0, l},
PlotStyle → {{Thick, Black}, {Thick, Dashing[Tiny],        (75)
Black}, {Dashing[Large], Thick, Black}},
PlotRange → {−2a, 2a}, ImageSize → 400], {t, 0, tt, 0.4}].
```

На рис. 1 представлены численные решения линейного уравнения (сплошная линия), нелинейного уравнения (мелкий пунктир) и аналитическое решение (крупный пунктир) для краевых задач при $\mathtt{n} = 2, \mathtt{l} = 1, \tau = 1, \rho = 1, \omega_2 = \pi$.

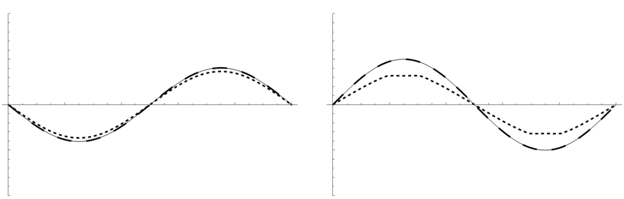

Рис. 1. Мгновенные профили струны для $a = 0,01; tt = 29,4$ (слева), для $a = 0,05; tt = 10$ (справа)

Колебания круглой мембраны

Рассмотрим осесимметричные колебания круглой мембраны, т.е. когда u не зависит от φ

$$\frac{\tau}{\rho[\mathtt{r}]}\left(\frac{\mathtt{u}^{(1,0)}[\mathtt{r},\mathtt{t}]}{\mathtt{r}}+\mathtt{u}^{(2,0)}[\mathtt{r},\mathtt{t}]\right)==\mathtt{u}^{(0,2)}[\mathtt{r},\mathtt{t}]. \tag{76}$$

Начальные условия (61) принимают вид

$$\mathtt{u}[\mathtt{r},0]==\mathtt{f}[\mathtt{r}], \qquad \mathtt{u}^{(0,1)}[\mathtt{r},0]==\mathtt{F}[\mathtt{r}]. \tag{77}$$

Для таких колебаний стоячие волны тоже не должны зависеть от φ, из чего следует, что в уравнении (72) необходимо положить $k=0$, в итоге получим выражение для стоячих волн $\mathtt{u}[\mathtt{r},\mathtt{t}]$

$$\mathtt{C(1)B(1)J_0}\left(\frac{\mathtt{rj_{0,n}}}{\mathtt{l}}\right)\left(\mathtt{A(1)Cos}\left(\frac{\mathtt{atj_{0,n}}}{\mathtt{l}}\right)+\mathtt{A(2)Sin}\left(\frac{\mathtt{atj_{0,n}}}{\mathtt{l}}\right)\right).$$

Данное выражение перепишем в виде

$$\mathtt{u_n}=\left(\mathtt{A(n)Cos}\left(\frac{\mathtt{atj_{0,n}}}{\mathtt{l}}\right)+\mathtt{B(n)Sin}\left(\frac{\mathtt{atj_{0,n}}}{\mathtt{l}}\right)\right)\mathtt{J_0}\left(\frac{\mathtt{rj_{0,n}}}{\mathtt{l}}\right).$$

Далее, будем искать решение в виде наложения осесимметричных стоячих волн

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\mu_n^{(0)}at}{l}+B_n\sin\frac{\mu_n^{(0)}at}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l}r\right).$$

Коэффициенты A_n и B_n найдем из начальных условий

$$u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l}r\right)=f(r) \qquad (0\le r<l), \tag{78}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^{(0)}}{l}B_nJ_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l}r\right)=F(r) \qquad (0\le r<l),$$

из которых получим, что

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} \int\limits_0^l f(r) r J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{l} \right) dr, \tag{79}$$

$$B_n = \frac{2}{a l \mu_n^{(0)} J_1^2(\mu_n^{(0)})} \int\limits_0^l F(r) r J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)} r}{l} \right) dr.$$

Приведем решение для следующих краевых условий:

$$u|_{t=0} = J_0 \left(\mu_3^{(0)} r / l \right), \qquad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \qquad u|_{r=l} = 0. \tag{80}$$

Поскольку $f(r) = J_0 \left(\mu_3^{(0)} r / l \right)$, $F(r) = 0$, $\mu_3^{(0)} \approxeq 8.654$ — третий корень уравнения $J_0(x) = 0$, то $B_n = 0$ для всех n, $A_n = 0$ для $n \neq 3$, а коэффициент $A_3 = 1$.

Таким образом, решение можно представить в виде

$$u(r,t) = \cos(\mu_n^{(0)} t) J_0 \left(\mu_n^{(0)} r \right). \tag{81}$$

Решение линейной задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathtt{Eq} = \mathtt{rD}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\mathtt{t}],\{\mathtt{t},2\}] == \tau/\rho \mathtt{D}[\mathtt{r} * \mathtt{D}[\mathtt{u}[\mathtt{r},\mathtt{t}],\mathtt{r}],\mathtt{r}];\\
&\mathtt{l} = 1; \tau = 1; \rho = 1;\\
&\mathtt{f}[\mathtt{r}] = \mathtt{J}_0\left(\mathtt{j}_{0,\mathtt{K}[1]}\,\mathtt{r}/\mathtt{l}\right);\\
&(\mathtt{sol} = \mathtt{DSolve}[\{\mathtt{Eq},\mathtt{u}[\mathtt{r},0] == \mathtt{f}[\mathtt{r}],\mathtt{u}^{(0,1)}[\mathtt{r},0] == 0,\\
&\mathtt{u}[\mathtt{l},\mathtt{t}] == 0\},\mathtt{u}[\mathtt{r},\mathtt{t}],\{\mathtt{r},\mathtt{t}\}][[1]]//\\
&\mathtt{FullSimplify})//\mathtt{TraditionalForm}.
\end{aligned} \tag{82}$$

В результате для $\mathtt{u}(\mathtt{r},\mathtt{t})$ имеем

$$\left\{ \mathtt{u}(\mathtt{r},\mathtt{t}) \to \sum_{\mathtt{K}[1]=1}^{\infty} \mathtt{J}_0(\mathtt{r}\,\mathtt{j}_{0,\mathtt{K}[1]}) \cos(\mathtt{t}\,\mathtt{j}_{0,\mathtt{K}[1]}) \right\}. \tag{83}$$

Анимацию можно построить, например, так [9]:

$$\begin{aligned}
&\mathtt{h[r_,t_] = u[r,t]/.sol[[1]]/.\{\infty \to 3\}//Activate//N;}\\
&\mathtt{ListAnimate[Table[Plot3D[}\\
&\mathtt{Evaluate[h[r,t]/.\{r \to Sqrt[x^2 + y^2]\}], \{x,y\} \in Disk[\,],}\\
&\mathtt{PlotRange \to \{-3,3\}, Ticks \to None, Mesh \to True}\\
&\mathtt{MeshStyle \to \{Red, Blue\}, PlotStyle \to Yellow,}\\
&\mathtt{Boxed \to False, Axes \to False, ImageSize \to Medium,}\\
&\mathtt{AspectRatio \to 1, Background \to Lighter[Orange, 0.85]],}\\
&\mathtt{\{t, 0, 10, 0.05\}]].}
\end{aligned} \tag{84}$$

Для решения (81) в анимации (84) нужно положить

$$\mathtt{h[r\_,t\_] = J_0(rj_{0,n})Cos[tj_{0,n}]//N.}$$

На рис. 2–3 представлены численные решения линейной краевой задачи (83) и аналитического решения (81) при $\mathtt{n} = 3$, $\mathtt{l} = 1$, для $t = 0; 1, 8$.

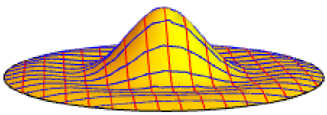

Рис. 2. Мгновенный профиль мембраны в начальный момент $t = 0$

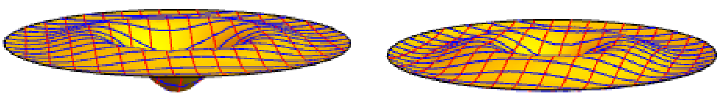

Рис. 3. Мгновенные профили мембраны при $t = 1, 8$: слева — для линейной задачи (83), справа — для аналитического решения (81)

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Варианты заданий

1. Поперечные колебания струны.
2. Продольные колебания балки.
3. Поперечные колебания балки.
4. Крутильные колебания вала.
5. Колебания прямоугольной мембраны.
6. Колебания круглой мембраны.
7. Колебания прямоугольной пластины.
8. Колебания круглой пластины.

Задание 1

Получить уравнения Эйлера — Лагранжа для механической системы с непрерывно распределенными параметрами по заданным кинетической и потенциальной энергии. Провести линеаризацию уравнений Эйлера — Лагранжа в окрестности положения равновесия.

Задание 2

Построить аналитическое решение для механической системы, используя разделение переменных. Найти корни частотного уравнения. Построить графики собственных форм.

Задание 3

Решение линейной и нелинейной краевых задач для уравнения в частных производных. Провести сравнение решения линейного уравнения в частных производных и решение нелинейного уравнения в частных производных.

Литература

[1] Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 472 с.

[3] Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. 352 с.

[4] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961. 228 с.

[5] Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.

[6] Morin D. Introduction to classical mechanics: with problems and solutions. New York: Cambridge University Press, 2008. 738 p.

[7] Richard H. Rand. Lecture Notes on Nonlinear Vibrations Internet-First University Press, 2003. 96 p.

[8] http://www.wolfram.com/mathematica/

[9] https://www.wolfram.com/language/11/partial-differetial-equations/generate-oscillations-in-a-circular-membrane.html?product=mathematica

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Lagrange_equation

Людмила Александровна ВЕНАТОВСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *Т. С. Спирина*
Корректор *С. В. Николаева*
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 00.00.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 1,68. Тираж 00 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.